CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS

DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE — MAI 1986

Epreuve commune de Mathématiques

DUREE : 3 heures

COEF : 1

PREAMBULE

A. Les trois parties du problème sont indépendantes entre elles à l'exception de la dernière question III.4) de la troisième partie.

B. Rappels de cours concernant les intégrales impropres sur un intervalle non borné

1°) Soit f une fonction réelle de la variable réelle x, intégrable sur l'intervalle fini $[a,b]$. Si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ a une limite I lorsque b tend vers l'infini, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et a pour valeur I.

Dans ce cas on a donc

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

2°) La convergence de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ entraine celle de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ qui est alors dite absolument convergente.

C. Rappel de la définition d'un produit scalaire euclidien sur un espace vectoriel réel E et de la norme qui peut s'en déduire.

c'est une application du produit cartésien $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à tout couple (X, Y) de vecteurs de E un nombre réel noté $\langle X \mid Y \rangle$, appelé produit scalaire des vecteurs X et Y, et satisfaisant aux axiomes suivants :

1) $\langle X \mid Y \rangle = \langle Y \mid X \rangle$, $\forall (X,Y) \in E \times E$

2) $\langle \lambda X \mid Y \rangle = \lambda \langle X \mid Y \rangle$, $\forall (X,Y) \in E \times E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\langle X \mid (Y_1 + Y_2) \rangle = \langle X \mid Y_1 \rangle + \langle X \mid Y_2 \rangle$, $\forall (X, Y_1, Y_2) \in E \times E \times E$

4) $\forall X \in E$, $\langle X \mid X \rangle \geqslant 0$ et $(\langle X \mid X \rangle = 0 \iff X = 0)$.

On peut alors associer à tout $X \in E$ sa norme $\| X \|$ par : $\| X \| = \sqrt{\langle X \mid X \rangle}$.

et on dit que deux éléments X et Y de E sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

PROBLEME

première partie

I.1) On désigne par V l'espace vectoriel réel des fonctions réelles, de la variable réelle x, et par E le sous espace vectoriel de V formé par les fonctions polynomiales à coefficients réels.

On désigne par D l'application de E dans V qui à toute fonction polynomiale y, élément de E, associe la fonction D (y) définie par :

$$D(y) : x \longrightarrow D(y)(x) = x\,y''(x) + (1-x)\,y'(x)$$

où y' et y" sont respectivement les dérivées première et seconde de y.

Montrer que D est une application linéaire de E dans E.

I.2) Pour tout entier naturel n, on désigne par E_n le sous espace vectoriel de E constitué par les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n et on note D_n la restriction de D à E_n.

Montrer que les fonctions e_k, k= 0, 1, 2, ..., n, définies par

$$e_k : x \longrightarrow e_k(x) = x^k$$

forment une base B_n de E_n et déterminer la matrice M_n qui définit D_n dans B_n.

Donner les valeurs propres de M_n et montrer que les sous espaces propres associés à chacune de ces matrices sont tous de dimension 1. Pour chaque valeur propre, caractériser dans la base B_n le sous espace propre qui lui est associé.

I.3) Déduire de ce qui précède que l'équation différentielle :

$$(1) \quad x\,y'' + (1-x)\,y' + n\,y = 0$$

admet un ensemble particulier de solutions formant un sous espace vectoriel G_n de E_n dont on précisera la dimension ; donner la forme des coefficients des termes de degré 0 et n des fonctions polynomiales éléments de G_n.

Tournez la page S. V. P.

Ecole Nationale de l'Aviation Civile
Concours Ingenieurs. Mathematiques
1986
page 193

deuxième partie

II.1) Pour tout entier naturel n, déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée parla fonction u de la variable réelle x définie par :

$$u : x \longrightarrow u(x) = x^n e^{-x}$$

Montrer que la dérivée v d'ordre n de u, soit $v = u^{(n)}$, est solution de l'équation différentielle :

$$(2) : \quad x y'' + (1+x)y' + (n+1)y = o$$

En déduire que la fonction w définie par :

$$w : x \longrightarrow w(x) = e^x v(x)$$

est solution de l'équation différentielle

$$(1) : \quad x y'' + (1-x)y' + n y = o$$

(Cette équation a déjà été rencontrée au I.3).

II.2) Démontrer que w est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et dont on donnera les coefficients (c'est donc un élément de l'ensemble étudié au I.3)).

II.3) Pour m entier naturel strictement positif on pose :

$$L_m(x) = e^x \frac{d^m}{dx^m} (x^m e^{-x})$$

Utiliser l'équation (1) pour déterminer une primitive de la fonction

$$x \longrightarrow (m-n)\, e^{-x}\, L_m(x)\, L_n(x) \quad \text{où} \quad m \neq n$$

En déduire la convergence de l'intégrale impropre :

$$I(m, n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x)\, dx$$

dont on donnera la valeur.

II.4) Etablir par récurrence sur q , entier naturel, la convergence de l'intégrale impropre :

$$J(q) = \int_0^{+\infty} x^q e^{-x}\, dx \quad .$$

et donner sa valeur.

Troisième partie

On désigne par V_2 l'ensemble des fonctions réelles f de la variable réelle $x \geq 0$ continues sur $\mathbb{R}^+$ et telles que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 e^{-x} dx$ soit convergente.

III.1) Montrer que, si f et g sont deux éléments de V_2, l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x} dx$$

est absolument convergente et établir l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} |f(x)\, g(x)|\, e^{-x} dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [(f(x))^2 + (g(x))^2] e^{-x} dx.$$

III.2) En déduire que la loi d'addition des fonctions et la loi de multiplication des fonctions par un nombre réel font de V_2 un espace vectoriel sur le corps des réels.

III.3) Vérifier qu'en associant à tout couple (f, g)d'éléments de V_2 le nombre

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)\, g(x)\, e^{-x} dx$$

on définit un produit scalaire euclidien sur V_2 .

La norme de tout élément f de V_2 est alors définie par:

$$\| f \| = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$$

III.4) On étend à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels la famille des fonctions polynomiales L_n, rencontrées dans la première et la deuxième partie, en définissant L_0 par

$$L_0 : x \longrightarrow L_0(x) = 1 .$$

Montrer alors que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'éléments orthogonaux relativement au produit scalaire défini sur V_2. Calculer $\| L_n \|$.